

No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without written permission from the IB.

Additionally, the license tied with this product prohibits commercial use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, is not permitted and is subject to the IB's prior written consent via a license. More information on how to request a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite de l'IB.

De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation commerciale de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, n'est pas autorisée et est soumise au consentement écrit préalable de l'IB par l'intermédiaire d'une licence. Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour demander une licence, rendez-vous à l'adresse suivante : <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin que medie la autorización escrita del IB.

Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso con fines comerciales de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales— no está permitido y estará sujeto al otorgamiento previo de una licencia escrita por parte del IB. En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

**Matemáticas**  
**Nivel Superior**  
**Prueba 3 – conjuntos, relaciones y grupos**

Martes 10 de noviembre de 2020 (tarde)

1 hora

---

**Instrucciones para los alumnos**

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 5]

Considere dos subconjuntos  $A$  y  $B$  de un conjunto universal  $U$ .

(a) Dibuje con precisión un diagrama de Venn que ilustre:

(i)  $(A \cup B)'$ ;

(ii)  $A' \cup B'$ . [2]

(b) Utilice las leyes que rigen las operaciones entre conjuntos para mostrar que  $A \cap (A \cap B)' = A \setminus B$ . [3]

2. [Puntuación máxima: 10]

La relación  $R$  se define sobre  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  de modo tal que  $(a, b)R(c, d)$  si y solo si  $b - a = d - c$ .

(a) Demuestre que  $R$  es una relación de equivalencia. [5]

(b) (i) Halle dos elementos de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  que estén en la misma clase de equivalencia que  $(1, 3)$ .

(ii) Describa geoméricamente la clase de equivalencia a la que pertenece  $(1, 3)$ .

(iii) Describa geoméricamente las clases de equivalencia de la relación  $R$ . [5]

3. [Puntuación máxima: 5]

La función  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  se define como  $g(x, y) = (xy, x + y)$ .

(a) Dé un ejemplo para demostrar que  $g$  no es inyectiva. [2]

(b) Muestre que  $g$  no es sobreyectiva. [3]

4. [Puntuación máxima: 18]

La operación binaria  $*$  se define sobre el conjunto  $S = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  de modo tal que  $a * b = a + b - ab$ , para todo  $a, b \in S$ .

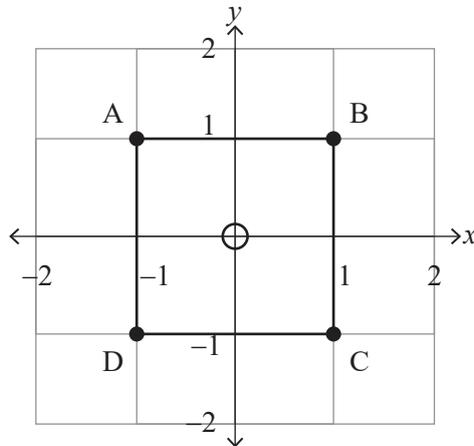
- (a) Halle el elemento neutro. [2]
- (b) Muestre que  $*$  es asociativa. [3]
- (c) Resuelva  $x * x * x * x = -8$ . [5]
- (d) Muestre que todo elemento de  $S$  tiene simétrico. [2]
- (e) A partir de lo anterior, muestre que  $\{S, *\}$  es un grupo. [3]

Sea el conjunto  $H = \{0, 2\}$ .  $\{H, *\}$  es un subgrupo de  $\{S, *\}$ .

- (f) (i) Halle  $4H$ , la clase lateral por la izquierda de  $H$  con respecto a 4.
- (ii) Resuelva  $nH = 4H$ . [3]

5. [Puntuación máxima: 12]

Considere el cuadrado ABCD, cuyos vértices están en  $A(-1, 1)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(1, -1)$  y  $D(-1, -1)$ , tal y como se muestra en la siguiente figura.



Sea  $V = \{A, B, C, D\}$  el conjunto formado por los vértices del cuadrado. La simetría del cuadrado respecto a la recta  $x = 0$  se puede representar mediante la permutación  $(AB)(CD)$ , que da la posición final de los vértices.

(a) Describa la transformación geométrica individual representada por la permutación:

(i)  $(ABCD)$ ;

(ii)  $(AC)$ .

[4]

(b) Halle la permutación que representa:

(i) Una rotación de  $180^\circ$  alrededor de  $(0, 0)$ ;

(ii) Una simetría respecto a la recta  $y = 0$ .

[2]

Las permutaciones que representan las ocho simetrías del cuadrado forman un grupo  $\{G, \circ\}$ , donde  $\circ$  es la operación de composición de permutaciones.

(c) Halle una única permutación equivalente a  $(ABCD) \circ (AC)$ .

[2]

Sea  $e$  la permutación identidad.

(d) Halle un subgrupo cíclico de  $G$  de orden 4.

[2]

(e) Halle un subgrupo no cíclico de  $G$  de orden 4.

[2]